

La logique partielle : une généralisation de la logique trivalente de Kleene.

De toutes les logiques multivalentes, seule la logique trivalente de Kleene confère à la troisième valeur de vérité une interprétation dénuée de toute ambiguïté : c'est l'indéfinie, l'absence de valeur ou encore un manque.

Nous présenterons la logique de Kleene comme une *logique monotone* relativement à l'ordre suivant. Soit 1, 0 et $\perp$ les trois valeurs de vérité (respectivement le vrai, le faux et l'indéfini). L'ordre $\preceq$ est explicitement défini par $1 \preceq 1$, $0 \preceq 0$, $\perp \preceq \perp$, $\perp \preceq 1$, $\perp \preceq 0$.

$X \preceq Y$ se lit Y est au moins aussi défini que X ou encore X est une approximation de Y . La notion de table de vérité pour la logique partielle est introduite puis celle d'interprétation monotone partielle. La complétude fonctionnelle est démontrée. On montre ensuite qu'à chaque interprétation classique correspond une classe d'interprétations partielles (qui sont des approximations de l'interprétation classique), classe qui forme un inf-semi-treillis fondé sur $\preceq$. Différentes notions de validité sont introduites et un système de règles inspiré de la déduction naturelle est présenté.

En un second temps, nous présentons une généralisation de la logique partielle au calcul des prédicats. Pour ce faire, l'objet indéfini $\perp_e$ est introduit et la relation $\preceq$ est étendue aux objets : $\perp_e \preceq \perp_e$ et, pour tout objet x , $x \preceq x$ et $\perp_e \preceq x$.

La notion d'interprétation partielle est introduite pour le calcul des prédicats. Un système de règles de déduction est proposé et on démontre sa fiabilité et sa complétude. Plusieurs résultats métalogiques sont présentés.

Dans une troisième étape, la notion d'interprétation partielle est étendue à la *théorie propositionnelle des types*, c'est-à-dire la théorie des types basées sur l'unique type des propositions, le type t . Une définition récursive de la hiérarchie des fonctions propositionnelles partielles est donnée. La syntaxe est présentée basée sur trois primitifs : l'identité propositionnelle $\equiv$, l'abstracteur λ et sa converse, l'application fonctionnelle. Les constantes logiques et les quantificateurs sont introduits par définition. Partant de deux idées respectivement de Blamey et Van Benthem, la complétude fonctionnelle est prouvée. Un système de règles est présenté dont on prouve la complétude et la fiabilité. Enfin, les interprétations sont généralisées à la théorie des types basée sur des domaines finis d'objets de chaque catégorie. Une motivation pour la sémantique des langues naturelles est présentée. Les concepts étudiés jusqu'ici sont généralisés et les preuves de complétude fonctionnelle, de fiabilité et de complétude sont présentées.